ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пензенский государственный университет»

Т. В. Елисеева

Задачи и упражнения по курсу «Интегральные уравнения и вариационное исчисление»

Учебно-методическое пособие

Пенза
Издательство
Пензенского государственного
университета
2009

УДК 517.9
Е51

Р е ц е н з е н т
кандидат физико-математических наук, доцент,
заведующий кафедрой «Математический анализ»
ГОУВПО «Пензенский государственный педагогический университет
им. В. Г. Белинского»
О. Э. Яремко

Елисеева, Т. В.

Е51 Задачи и упражнения по курсу «Интегральные уравнения и вариационное исчисление» : учеб.-метод. пособие / Т. В. Елисеева. – Пенза : Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2009. – 32 с.

Содержатся примеры решения задач вариационного исчисления и теории интегральных уравнений. В конце каждого раздела имеются упражнения для самостоятельного решения.

Учебно-методическое пособие подготовлено на кафедре «Высшая и прикладная математика» и предназначено для студентов, обучающихся по направлению «Физика».

УДК 517.9

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел 1

Функционалы. Простейшая задача вариационного исчисления

§ 1. Функционалы. Функциональные пространства

Говорят, что задан *функционал*, если каждой функции (или кривой) из некоторого класса поставлено в соответствие определенное число. Таким образом, можно сказать, что функционалы – это функции, в которых роль независимого переменного играют кривые или функции.

Будем рассматривать следующие функциональные пространства:

1. Пространство C, состоящее из всех непрерывных функций, определенных на некотором отрезке $[a, b]$. Сложение элементов и умножение их на числа вводятся как обычные сложение функций и умножение их на числа, а норма определяется как максимум модуля, т. е. $\|y\| = \max\limits_{a \le x \le b} |y(x)|$.

Расстоянием между любыми двумя функциями $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ из пространства $C[a, b]$ называется число

$$\rho = \rho(y_1, y_2) = \max_{a \le x \le b} |y_1(x) - y_2(x)|.$$

2. Пространство C^1, состоящее из всех функций, определенных на некотором отрезке $[a, b]$ и непрерывных на этом отрезке вместе со своей первой производной. Операции сложения и умножения на числа вводятся так же, как и в C, а норма определяется формулой

$$\|y\|_1 = \max_{a \le x \le b} \{|y(x)|, |y'(x)|\}.$$

Расстоянием между любыми двумя функциями $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ из пространства C^1 $[a, b]$ называется число

$$\rho_1 = \rho_1(y_1, y_2) = \max_{a \le x \le b} \{|y_1(x) - y_2(x)|, |y_1'(x) - y_2'(x)|\}.$$

1. Найти расстояние между функциями $y = x$ и $y = \ln x$ в классе $C^1\left[e^{-1}, e\right]$.

► По определению $\rho_1 = \max\limits_{e^{-1} \le x \le e} \left\{ |x - \ln x|, \left|1 - \dfrac{1}{x}\right| \right\}$.

Исследуем на экстремум функцию $g(x) = x - \ln x$ на интервале $\left(e^{-1}, e\right)$. $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$, $g'(x) = 0$ при $x = 1$. Вычислим значения функции $g(x)$ в точке экстремума и на концах интервала. $g(1) = 1$, $g\left(e^{-1}\right) = e^{-1} + 1$, $g(e) = e - 1$. Наибольшее значение $|x - \ln x| = e - 1$ при $x = e$.

Исследуем теперь на экстремум функцию $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$. Так как $g''(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0$ на интервале $\left(e^{-1}, e\right)$, значит, $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ монотонно возрастает на этом интервале и, в силу непрерывности, свои наибольшее и наименьшее значения примет на концах интервала. $g'\left(e^{-1}\right) = 1 - e$, $g'(e) = 1 - \dfrac{1}{e}$. Наибольшее значение $\left|1 - \dfrac{1}{x}\right| = e - 1$ при $x = e^{-1}$.

Таким образом, расстояние между функциями $y = x$ и $y = \ln x$ в классе $C^1\left[e^{-1}, e\right]$ $\rho_1 = (e - 1)$. ■

2. Вычислить функционал $J[y] = \int\limits_0^1 [y(x)]^2 dx$, если $y_1(x) = x$, $y_2(x) = e^x$, $y_3(x) = \sqrt{1 + x^2}$.

3. Вычислить функционал $J[y] = \int\limits_1^2 \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx$, если $y_1(x) = \ln x$, $y_2(x) = x^2$.

4. Найти расстояние между функциями $y = x^2$ и $y = x$ в классе $C[0,1]$.

5. Найти расстояние между функциями $y = xe^{-x}$ и $y = 0$ в классе $C[0,2]$.

6. Найти расстояние между функциями $y = \sin x$ и $y = \cos x$ в классе $C^1\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

§ 2. Дифференциал функционала

Рассмотрим функционал $J[y]$ и его приращение $\Delta J = J[y+h] - J[y]$, отвечающее приращению h. Если y фиксировано, то ΔJ представляет функционал от h.

Дифференциалом, или *вариацией*, δJ функционала J называют главную линейную часть приращения ΔJ функционала J, т. е. линейный функционал $\varphi(h)$, отличающийся ΔJ на бесконечно малую величину.

$$\Delta J(h) = \varphi(h) + \alpha \|h\|\text{, где } \alpha \to 0\text{, когда } \|h\| \to 0 .$$

7. Найти вариацию функционала $J[y] = \int\limits_{x_0}^{x_1} yy'dx$, если $y(x)$, $\delta y \in C^1[x_0, x_1]$.

► По определению приращения функционала

$$\Delta J = J[y + \delta y] - J[y] =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x_1} (y + \delta y)(y' + \delta y')\,dx - \int\limits_{x_0}^{x_1} yy'dx = \int\limits_{x_0}^{x_1} (y\delta y' + y'\delta y)\,dx + \int\limits_{x_0}^{x_1} \delta y \delta y' dx.$$

Главная линейная часть приращения – это искомая вариация функционала

$$\delta J[y] = \int\limits_{x_0}^{x_1} (y\delta y' + y'\delta y)\,dx . \blacksquare$$

8. Найти приращение функционала $J[y]=\int\limits_0^3 y^2 y' dx$, если $y(x)=x^2$, $y_1(x)=x^3$.

9. Найти приращение и вариацию функционала $J[y]=\int\limits_1^e \left(yy'+xy'^2\right)dx$, если $y=\ln x$, $\delta y=\dfrac{\alpha(x-1)}{e-1}$.

10. Найти приращение и вариацию функционала $J[y]=\int\limits_0^\pi y'^2 \sin x\, dx$, если $y=\sin x$, $\delta y=\alpha\cos x$.

§ 3. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера

Пусть $F(x,y,z)$ – функция, имеющая непрерывные частные производные по всем переменным до второго порядка включительно. Среди всех функций $y(x)$, имеющих непрерывную производную и удовлетворяющих условиям $y(a)=A$, $y(b)=B$, требуется найти ту функцию, которая доставляет слабый экстремум функционалу $J[y]=\int\limits_a^b F(x,y(x),y'(x))dx$.

Теорема 1. Для того чтобы функционал

$$J[y]=\int\limits_a^b F(x,y(x),y'(x))dx,$$

определенный на множестве функций $y=y(x)$, имеющих непрерывную первую производную и удовлетворяющих условиям $y(a)=A$, $y(b)=B$, достигал на данной функции $y(x)$ экстремума, необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла *уравнению Эйлера*

$$F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0.$$

Укажем некоторые частные случаи уравнения Эйлера.

1. Подынтегральная функция не зависит от y. Функционал

$$J[y]=\int_a^b F(x, y')\,dx .$$

Уравнение Эйлера принимает вид

$$F'_{y'}=C .$$

2. Подынтегральная функция не зависит от x. Функционал

$$J[y]=\int_a^b F(y, y')\,dx .$$

В этом случае уравнение Эйлера имеет вид

$$F-y'F'_{y'}=C .$$

3. Подынтегральная функция не зависит от y'. Функционал

$$J[y]=\int_a^b F(x, y)\,dx .$$

Уравнение Эйлера

$$F'_y(x, y)=0 .$$

4. Функционалы вида

$$J[y]=\int_a^b v(x, y)\sqrt{1+y'^2}\,dx .$$

Уравнение Эйлера

$$v'_y-v'_x y'-v\cdot\frac{y''}{1+y'^2}=0 .$$

11. Исследовать на экстремум функционал

$$J[y]=\int_1^2 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x}\,dx ,\ y(1)=0 ,\ y(2)=1 .$$

► Подынтегральная функция не содержит y, поэтому уравнение Эйлера имеет вид $F'_{y'} = C$.

$$\frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}} = C,$$

$$y' = Cx\sqrt{1+y'^2},$$

$$y'^2 = C^2x^2 + C^2x^2y'^2,$$

$$y'^2\left(1 - C^2x^2\right) = C^2x^2,$$

$$y' = \frac{Cx}{\sqrt{1-C^2x^2}},$$

$$y = \int \frac{Cx}{\sqrt{1-C^2x^2}}dx = -\frac{1}{2C}\int \frac{d\left(1-C^2x^2\right)}{\sqrt{1-C^2x^2}} = \frac{1}{C}\sqrt{1-C^2x^2} + C_1,$$

$$C\left(y - C_1\right) = \sqrt{1-C^2x^2},$$

$$C^2\left(y - C_1\right)^2 = 1 - C^2x^2,$$

$$x^2 + \left(y - C_1\right)^2 = \frac{1}{C^2}.$$

Экстремалями являются окружности с центром в точке $\left(0, C_1\right)$ радиуса $\frac{1}{C}$. Подставим в полученное уравнение граничные условия.

$$\begin{cases} C_1^2 + 1 = \dfrac{1}{C^2}, \\ \left(1 - C_1\right)^2 + 4 = \dfrac{1}{C^2}. \end{cases} \qquad \begin{cases} C = \dfrac{1}{\sqrt{5}}, \\ C_1 = 2. \end{cases}$$

Искомое уравнение окружности $x^2 + \left(y - 2\right)^2 = 5$. ■

Исследовать на экстремум функционалы.

12. $J[y]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(y'^2-y^2\right)dx;\quad y(0)=0,\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$

13. $J[y]=\int_0^1\left(y'^2+12xy\right)dx;\quad y(0)=0,\quad y(1)=1.$

14. $J[y]=\int_a^b\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx.$

15. $J[y]=\int_a^b\left(y'^2+2yy'-16y^2\right)dx.$

16. $J[y]=\int_a^b\left(xy'+y'^2\right)dx.$

17. $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}\left(y^2+2xyy'\right)dx;\quad y(x_0)=y_0,\quad y(x_1)=y_1.$

18. $J[y]=\int_0^1\left(xy+y^2-2y^2y'\right)dx;\quad y(0)=1,\quad y(1)=2.$

19. $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}y'\left(1+x^2y'\right)dx.$

20. $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}\left(y^2+y'^2-2y\sin x\right)dx.$

21. $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{y\left(1+y'^2\right)}dx.$

22. $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}e^y\left(1+xy'\right)dx;\quad y(x_0)=y_0,\quad y(x_1)=y_1.$

23. $J[y]=\int\limits_0^1 y'^2\,dx; \quad y(0)=0, \quad y(1)=1.$

24. $J[y]=\int\limits_0^1 \left(xy'-y'^2\right)dx; \quad y(0)=1, \quad y(1)=\dfrac{1}{4}.$

25. $J[y]=\int\limits_0^{\ln 2} \left(y'^2+2y^2+2y\right)e^{-x}\,dx; \quad y(0)=y(\ln 2)=0.$

26. $J[y]=\int\limits_{x_0}^{x_1} \left(y^2+y'^2+2ye^x\right)dx.$

27. $J[y]=\int\limits_{x_0}^{x_1} \left(x^2y'^2+2y^2+2xy\right)dx.$

§ 4. Задача со свободными концами

Пусть $F(x,y,z)$ – функция, имеющая непрерывные частные производные по всем переменным до второго порядка включительно. Среди всех кривых $y(x)$, концы которых лежат на двух заданных вертикальных прямых $x=a$, $x=b$, найти ту, которая доставляет экстремум функционалу $J[y]=\int\limits_a^b F(x,y(x),y'(x))dx$.

Для решения поставленной задачи нужно найти общий интеграл уравнения Эйлера и затем определить значения произвольных постоянных из условий

$$F'_{y'}\Big|_{x=a}=0,\ F'_{y'}\Big|_{x=b}=0.$$

Если ищется экстремум функционала на классе кривых, соединяющих данную точку A (с абсциссой a) и произвольную точку прямой $x=b$, то на концах должны выполняться условия

$$y(a)=A,\ F'_{y'}\Big|_{x=b}=0.$$

Если граничная точка (x_1, y_1) может перемещаться по горизонтальной прямой $y = y_1$, то должно выполняться условие

$$\left[F - y'F'_{y'}\right]_{x=x_1} = 0\,.$$

Если граничная точка (x_1, y_1) может перемещаться по некоторой кривой $y_1 = \varphi(x_1)$, то должно выполняться условие

$$\left[F + (\varphi' - y')F'_{y'}\right]_{x=x_1} = 0\,.$$

Это условие устанавливает зависимость между угловыми коэффициентами φ' и y' в граничной точке.

Указанные условия на концах кривых называются *условиями трансверсальности*.

28. Найти функцию, на которой может достигаться экстремум функционала

$$J[y] = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(y^2 - y'^2\right)dx; \quad y(0) = 0,$$

а другая граничная точка может скользить по прямой $x = \dfrac{\pi}{4}$.

► Подынтегральная функция не содержит x, поэтому для нахождения экстремалей можно взять уравнение Эйлера в виде $F - y'F'_{y'} = C$ или в общем виде $F'_y - \dfrac{d}{dx}F'_{y'} = 0$. Во втором случае получим дифференциальное уравнение

$$y'' + y = 0\,.$$

Общим решением является $y = C_1\cos x + C_2\sin x$. Из условия $y(0) = 0$ следует, что $C_1 = 0$, значит, $y = C_2\sin x$.

На втором конце кривой должно выполняться условие трансверсальности $F'_{y'}\Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = 0$. Получаем $C_2\cos\dfrac{\pi}{4} = 0$, $C_2 = 0$.

Таким образом, искомой функцией является $y=0$ при $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$. ■

29. Найти кривую, на которой может достигаться экстремум функционала

$$J[y]=\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx,\quad y(0)=0,$$

если вторая граничная точка (x_1,y_1) может перемещаться по окружности

$$(x-9)^2+y^2=9\,.$$

30. Найти кривые, на которых может достигаться экстремум функционала

$$J[y]=\int_0^{10}y'^3dx,\quad y(0)=0,\quad y(10)=0,$$

при условии, что допустимые кривые не могут проходить внутри круга, ограниченного окружностью

$$(x-5)^2+y^2=9\,.$$

31. Найти условие трансверсальности для функционалов вида

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}A(x,y)\sqrt{\left(1+y'^2\right)}dx.$$

32. Найти условие трансверсальности для функционалов вида

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}A(x,y)e^{\operatorname{arctg}y'}\sqrt{1+y'^2}\,dx,\quad A(x,y)\neq 0.$$

Раздел 2

Общие сведения теории интегральных уравнений

§ 1. Связь между линейными дифференциальными уравнениями и интегральными уравнениями типа Вольтерра

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n(x)y = \varphi(x),$$

причем будем предполагать, что при $x = 0$ функции $a_i(x)$ не имеют особенностей. Применяя подстановку $\dfrac{d^n y}{dx^n} = u(x)$, данное линейное дифференциальное уравнение может быть приведено к виду

$$u(x) + \int_0^x \left[a_1(x) + a_2(x)(x-\xi) + \ldots + a_n(x)\frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} \right] u(\xi)\, d\xi = f(x),$$

что представляет интегральное уравнение типа Вольтерра II рода.

Обратно, решение уравнения Вольтерра будет эквивалентно решению задачи Коши для линейного дифференциального уравнения. Единственность решения уравнения Вольтерра следует из того, что задача Коши допускает в точках, не имеющих особенностей, одно и только одно решение.

Составить интегральные уравнения, соответствующие дифференциальным уравнениям с заданными начальными условиями.

33. $\dfrac{d^2 y}{dx^2} + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

► Обозначим $\dfrac{d^2y}{dx^2}=u(x)$. Тогда

$$\frac{dy}{dx}=\int_0^x u(\xi)\,d\xi+C_1,$$

$$y(x)=\int_0^x\int_0^x u(\xi)\,d\xi\,d\xi+C_1x+C_2.$$

Применим формулу $\int_0^x u(\xi)\,d\xi^n=\int_0^x \dfrac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}u(\xi)\,d\xi$, где $\int_0^x u(\xi)\,d\xi^n$ обозначает n-кратный интеграл от функции $u(\xi)$.

$$y(x)=\int_0^x (x-\xi)\,u(\xi)\,d\xi+C_1x+C_2$$

Подставим полученные выражения для $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{dy}{dx}$ и $y(x)$ в данное дифференциальное уравнение. Получим

$$u(x)+\int_0^x (x-\xi)\,u(\xi)\,d\xi+C_1x+C_2=0.$$

Из граничных условий $C_1=1$, $C_2=0$. Таким образом, уравнение

$$u(x)=-x+\int_0^x (\xi-x)\,u(\xi)\,d\xi$$

есть интегральное уравнение Вольтерра II рода. ■

34. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-5\dfrac{dy}{dx}+6y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=-1.$

35. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=\cos x,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1.$

36. $\dfrac{dy}{dx}-y=0,\quad y(0)=1.$

37. $\dfrac{d^3y}{dx^3}-3\dfrac{d^2y}{dx^2}-6\dfrac{dy}{dx}+8y=0,\quad y(0)=y'(0)=y''(0)=1.$

§ 2. Интегральные уравнения с разностным ядром

Пусть ядро интегрального уравнения зависит от разности аргументов

$$K(x,\xi)=K(x-\xi).$$

При решении таких уравнений часто бывает целесообразно использовать преобразования Лапласа и Фурье.

Решить интегральные уравнения с разностным ядром.

38. $u(x)=x-\int\limits_0^x (x-\xi)u(\xi)d\xi.$

► Интеграл $\int\limits_0^x (x-\xi)u(\xi)d\xi$ представляет собой свертку функций x и $u(x)$. Интегральное уравнение перепишем в виде $u(x)=x-x*u(x)$. Применим к уравнению преобразование Лапласа. Образ функции $u(x)$ обозначим $U(p)$, образом функции x является функция $\frac{1}{p^2}$.

В образах Лапласа интегральное уравнение принимает вид

$$U(p)=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2}U(p).$$

Выразим функцию $U(p)$.

$$U(p)=\frac{1}{p^2+1}.$$

Подействуем на полученное равенство обратным преобразованием Лапласа. Получим, что $u(x)=\sin x$. Это искомое решение интегрального уравнения. ■

39. $u(x)=1+\int\limits_0^x (\xi-x)u(\xi)d\xi.$

40. $u(x)=-2\cos x+x+2+\int\limits_0^x (\xi-x)u(\xi)d\xi.$

41. $u(x)=29+6x+\int\limits_0^x(6x-6\xi+5)u(\xi)d\xi.$

42. $u(x)=f(x)+\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x-\xi|}u(\xi)d\xi \quad \left(\lambda<\dfrac{1}{2}\right),$ где $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$

43. $u(x)=e^x-\int\limits_0^x e^{x-\xi}u(\xi)d\xi.$

44. $u(x)=\cos x-\int\limits_0^x(x-\xi)\cos(x-\xi)u(\xi)d\xi.$

Р а з д е л 3

Теория Фредгольма

§ 1. Решение интегральных уравнений II рода методом последовательных подстановок

Теорема 2. Если

а) ядро $K(x,\xi)\neq 0$ вещественно и непрерывно в прямоугольнике $R(a\le x\le b, a\le \xi\le b)$ и $|K(x,\xi)|\le M$;

б) $f(x)\neq 0$ вещественна и непрерывна в интервале $l(a\le x\le b)$;

в) λ – const, $|\lambda|<\dfrac{1}{M(b-a)}$,

то уравнение $u(x)=f(x)+\lambda\int\limits_a^b K(x,\xi)\,u(\xi)\,d\xi$, *a*, *b* – const, имеет одно и только одно решение в *l*, выражающееся абсолютно и равномерно сходящимся рядом

$$u(x)=f(x)+\lambda\int\limits_a^b K(x,\xi)f(\xi)\,d\xi+\lambda^2\int\limits_a^b K(x,\xi)\int\limits_a^b K(\xi,\xi_1)\,f(\xi_1)\,d\xi_1\,d\xi+$$
$$+\lambda^3\int\limits_a^b K(x,\xi)\int\limits_a^b K(\xi,\xi_1)\int\limits_a^b K(\xi_1,\xi_2)f(\xi_2)\,d\xi_2\,d\xi_1\,d\xi+\ldots$$

Теорема 3. Если

а) ядро $K(x,\xi)\neq 0$ вещественно и непрерывно в *R* и $|K(x,\xi)|\le M$;

б) $f(x)\neq 0$ вещественна и непрерывна в *l*;

в) λ – const,

то уравнение $u(x)=f(x)+\lambda\int\limits_a^x K(x,\xi)\,u(\xi)\,d\xi$, *a* – const, имеет одно и только одно непрерывное решение $u(x)$, которое выражается абсолютно и равномерно сходящимся рядом

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,\xi)f(\xi)\,d\xi+\lambda^2\int_a^x K(x,\xi)\int_a^\xi K(\xi,\xi_1)\,f(\xi_1)\,d\xi_1\,d\xi+$$

$$+\lambda^3\int_a^x K(x,\xi)\int_a^\xi K(\xi,\xi_1)\int_a^{\xi_1} K(\xi_1,\xi_2)f(\xi_2)\,d\xi_2\,d\xi_1\,d\xi+\ldots$$

45. Решить интегральное уравнение методом последовательных подстановок $u(x)=1+\int\limits_0^x u(\xi)d\xi.$

►

$$u(x)=1+\int_0^x d\xi+\int_0^x\int_0^\xi d\xi_1 d\xi+\int_0^x\int_0^\xi\int_0^{\xi_1} d\xi_2 d\xi_1 d\xi+\ldots=1+x+\int_0^x \xi\,d\xi+\int_0^x\int_0^\xi \xi_1 d\xi_1 d\xi+\ldots=$$

$$=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\int_0^x \xi^2 d\xi+\ldots=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots=e^x.$$

Искомое решение интегрального уравнения $u(x)=e^x$. ■

§ 2. Решение уравнения Фредгольма, данное Вольтеррой

Вольтерра показал, как найти решение уравнения

$$u(x)=f(x)+\int_a^b K(x,\xi)\,u(\xi)\,d\xi\,,$$

если известна функция $k(x,\xi)$, взаимная с $K(x,\xi)$

Теорема 4. Если

а) ядро $K(x,\xi)\neq 0$ вещественно и непрерывно в R;

в) $f(x)\neq 0$ вещественна и непрерывна в l;

г) функция $k(x,\xi)$, взаимная с $K(x,\xi)$, существует,

то уравнение $u(x)=f(x)+\int\limits_a^b K(x,\xi)\,u(\xi)\,d\xi$ имеет одно и только одно непрерывное решение $u(x)$ в l и это решение выражается формулой $u(x)=f(x)-\int\limits_a^b k(x,\xi)\,f(\xi)\,d\xi$.

46. Решить интегральное уравнение $u(x)=\frac{5}{6}x+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 x\xi\, u(\xi)d\xi$ методом построения взаимной функции.

► Построим итерированные функции по формулам

$$K_1(x,\xi)=K(x,\xi),\ K_i(x,\xi)=\int\limits_a^b K(x,s)K_{i-1}(s,\xi)\,ds\,.$$

$$K_1(x,\xi)=\frac{1}{2}x\xi\,,\ K_2(x,\xi)=\int\limits_0^1\frac{1}{2}xs\cdot\frac{1}{2}s\xi\,ds=\frac{1}{4}x\xi\int\limits_0^1 s^2ds=\frac{1}{12}x\xi\,,$$

$$K_3(x,\xi)=\int\limits_0^1\frac{1}{2}xs\cdot\frac{1}{12}s\xi\,ds=\frac{1}{24}x\xi\int\limits_0^1 s^2ds=\frac{1}{72}x\xi\,,\ \ldots$$

Продолжая описанный процесс, получим функцию $k(x,\xi)$, взаимную с $K(x,\xi)$, по формуле

$$-k(x,\xi)=K_1(x,\xi)+K_2(x,\xi)+\ldots+K_n(x,\xi)+\ldots,$$

$$-k(x,\xi)=\frac{1}{2}x\xi\left(1+\frac{1}{6}+\frac{1}{36}+\ldots\right)$$

В скобках получили сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q=\frac{1}{6}$. Пользуясь известной формулой для такой суммы $S=\frac{a}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{6}}=\frac{6}{5}$, имеем $-k(x,\xi)=\frac{1}{2}x\xi\frac{6}{5}=\frac{3}{5}x\xi$.

Тогда искомое решение интегрального уравнения

$$u(x)=\frac{5}{6}x+\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{6}\int\limits_0^1 x\xi^2d\xi=\frac{5}{6}x+\frac{1}{2}x\frac{\xi^3}{3}\Bigg|_0^1=\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}x=x\,.$$

Итак, $u(x)=x$.■

Решить интегральные уравнения методом последовательных подстановок или с помощью применения взаимных функций.

47. $u(x)=e^{x}-\frac{e}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}u(t)dt.$

48. $u(x)=\sin x-\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{1}{2}}xt\,u(t)dt.$

49. $u(x)=x+\int_{0}^{\frac{1}{2}}u(t)dt.$

50. $u(x)=\frac{3}{2}e^{x}-\frac{xe^{x}}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}t\,u(t)dt.$

§ 3. Решение уравнения Фредгольма II рода с параметром

Сводная таблица решений

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_{a}^{b}K(x,\xi)\,u(\xi)\,d\xi$$

$D(\lambda)\neq 0$		$D(\lambda)=0$, ранг q	
Неоднородное	Однородное	Неоднородное	Однородное
Единственное решение $u(x)=f(x)+\int_{a}^{b}\frac{D(x,\xi;\lambda)f(\xi)}{D(\lambda)}d\xi$	Единственное решение $u\equiv 0$	Вообще говоря, нет непрерывных решений. Решение существует только тогда, когда функция $f(x)$ удовлетворяет условиям $\int_{a}^{b}f(x)\overline{\varphi}_{\alpha}(x)dx=0$. В этом случае имеется ∞^{q} решений	∞^{q} решений: $\sum_{\alpha=1}^{q}C_{\alpha}\varphi_{\alpha}(x)$

Здесь *детерминант Фредгольма*

$$D(\lambda)\equiv 1-\lambda\int\limits_a^b K(\xi,\xi)d\xi+\frac{\lambda^2}{2}\int\limits_a^b\int\limits_a^b\begin{vmatrix}K_{11} & K_{12}\\ K_{21} & K_{22}\end{vmatrix}d\xi_1\,d\xi_2-$$

$$-\frac{\lambda^3}{3}\int\limits_a^b\int\limits_a^b\int\limits_a^b\begin{vmatrix}K_{11} & K_{12} & K_{13}\\ K_{21} & K_{22} & K_{23}\\ K_{31} & K_{32} & K_{33}\end{vmatrix}d\xi_1\,d\xi_2\,d\xi_3+\ldots,\quad K_{ij}=K\left(\xi_i,\xi_j\right),$$

первый минор Фредгольма

$$D(x,\xi;\lambda)\equiv\lambda K(x,\xi)-\lambda^2\int\limits_a^b\begin{vmatrix}K(x,\xi) & K(x,\xi_1)\\ K(\xi_1,\xi) & K(\xi_1,\xi_1)\end{vmatrix}d\xi_1+$$

$$+\frac{\lambda^3}{2!}\int\limits_a^b\int\limits_a^b\begin{vmatrix}K(x,\xi) & K(x,\xi_1) & K(x,\xi_2)\\ K(\xi_1,\xi) & K(\xi_1,\xi_1) & K(\xi_1,\xi_2)\\ K(\xi_2,\xi) & K(\xi_2,\xi_1) & K(\xi_2,\xi_2)\end{vmatrix}d\xi_1\,d\xi_2-\ldots$$

$\varphi_\alpha(x)$ и $\overline{\varphi}_\alpha(x)$ – фундаментальные функции, соответственно, ядер $K(x,\xi)$ и $\overline{K}(x,\xi)$.

51. Решить интегральное уравнение $u(x)=\cos x+\lambda\int\limits_0^\pi \sin x\,u(\xi)d\xi.$

►Ядро интегрального уравнения $K(x,\xi)=\sin x$. Вычислим определитель и первый минор Фредгольма.

$$D(\lambda)=1-\lambda\int\limits_0^\pi\sin\xi\,d\xi+\frac{\lambda^2}{2!}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi\begin{vmatrix}\sin\xi_1 & \sin\xi_1\\ \sin\xi_2 & \sin\xi_2\end{vmatrix}d\xi_1 d\xi_2-\ldots=1-2\lambda,$$

$$D(x,\xi;\lambda)=\lambda\sin x.$$

При $\lambda\neq\frac{1}{2}$ $u(x)=\cos x+\int\limits_0^\pi\frac{\lambda\sin x}{1-2\lambda}\cdot\cos\xi\,d\xi=\cos x$.

При $\lambda_0=\frac{1}{2}$ $D(\lambda_0)=0$. Найдем ранг характеристического числа λ_0. Так как $D(x,\xi;\lambda_0)=\lambda_0\sin x\neq 0$ при $x\in(0,\pi)$, то ранг $q=1$. Фундаментальная функция союзного ядра $\overline{\varphi}_1(x)=\dfrac{D(x_1,x;\lambda_0)}{D(x_1,\xi_1;\lambda_0)}=\dfrac{\lambda_0\sin x_1}{\lambda_0\sin x_1}=1$.

Проверим необходимое условие ортогональности $\int\limits_a^b f(x)\overline{\varphi}_\alpha(x)dx = 0$, $\alpha = 1,\dots,q$. Так как $\int\limits_0^\pi \cos x\, dx = 0$, условие выполняется, и решение определяется по формуле $u(x) = f(x) + \int\limits_0^\pi H(x,\xi) f(\xi)\, d\xi + C_1\varphi_1(x)$, где

$$H(x,\xi) = \frac{D\begin{pmatrix} x & x_1 \\ \xi & \xi_1 \end{pmatrix}\lambda_0}{D(x_1,\xi_1;\lambda_0)} \text{ при } q = 1,$$

$$D\begin{pmatrix} x & x_1 \\ \xi & \xi_1 \end{pmatrix}\lambda_0 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\lambda_0^{n+2}}{n!}\int\limits_0^\pi \dots \int\limits_0^\pi K\begin{pmatrix} x, x_1, t_1, \dots, t_n \\ \xi, \xi_1, t_1, \dots, t_n \end{pmatrix} dt_1 \dots dt_n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\lambda_0^{n+2}}{n!}\int\limits_0^\pi \dots \int\limits_0^\pi \begin{vmatrix} \sin x \dots \sin x \\ \sin x_1 \dots \sin x_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \sin t_n \dots \sin t_n \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n = 0.$$

Следовательно, $H(x,\xi) = 0$. Фундаментальная функция ядра, принадлежащая характеристическому числу λ_0, вычисляется по формуле $\varphi_1(x) = \dfrac{D(x,\xi_1;\lambda_0)}{D(x_1,\xi_1;\lambda_0)} = \dfrac{\lambda_0 \sin x}{\lambda_0 \sin x_1} = \dfrac{\sin x}{\sin x_1}$, где x_1 – любое число из интервала $(0,\pi)$.

Получаем $u(x) = \cos x + C_1\dfrac{\sin x}{\sin x_1}$.

Итак, искомое решение интегрального уравнения Фредгольма

$$u(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{при} \quad \lambda \neq \dfrac{1}{2}; \\ \cos x + C_1\dfrac{\sin x}{\sin x_1}, & \text{при} \quad \lambda = \dfrac{1}{2}. \end{cases} \blacksquare$$

Вычислить $D(\lambda)$ и $D(x, y;\lambda)$ для уравнения Фредгольма

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,\xi) u(\xi) d\xi$$

для следующих ядер

52. $K(x,\xi) = 1, \quad a = 0, \quad b = 1.$

53. $K(x,\xi) = \sin x, \quad a = 0, \quad b = \pi.$

54. $K(x,\xi) = 2e^x e^\xi, \quad a = 0, \quad b = 1.$

55. $K(x,\xi) = x - \xi, \quad a = 0, \quad b = 1.$

56. $K(x,\xi) = g(\xi), \quad a = a, \quad b = b.$

Решить интегральные уравнения.

57. $u(x) = e^x + \lambda \int_0^{10} x\xi u(\xi) d\xi.$

58. $u(x) = \int_0^1 u(\xi) d\xi.$

59. $u(x) = \frac{1}{e^2 - 1} \int_0^1 2e^x e^\xi u(\xi) d\xi.$

60. $u(x) = x^2 + \lambda \int_0^{10} \xi u(\xi) d\xi.$

61. $u(x) = \sin x + \lambda \int_4^{10} x u(\xi) d\xi.$

62. $u(x) = \sec x \operatorname{tg} x - \lambda \int_0^1 u(\xi) d\xi.$

63. $u(x) = \cos x + \lambda \int_0^\pi e^x u(\xi) d\xi.$

Раздел 4

Уравнения с симметричными ядрами

Рассмотрим уравнение

$$u(x)=\lambda\int_a^b K(x,\xi)u(\xi)d\xi + f(x),$$

где ядро $K(x,\xi)$ – вещественное, непрерывное в R, не обращается тождественно в нуль и является симметричным, т. е.

$$K(x,\xi)\equiv K(\xi,x).$$

Пусть известна полная ортогональная система $\{\psi_r(x)\}$ его фундаментальных функций и характеристических чисел.

Если λ не является характеристическим числом, то решение интегрального уравнения имеет вид

$$u(x)=f(x)+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\psi_n(x)}{\lambda_n-\lambda}\int_a^b f(\xi)\psi_n(\xi)d\xi\right].$$

Если λ – характеристическое число ранга q и выполняется условие ортогональности $(f,\psi_\alpha)=0$ $(\alpha=1,2,\ldots,q)$ для всех фундаментальных функций, принадлежащих λ, то решение интегрального уравнения определяется по формуле

$$u(x)=f(x)+C_1\psi_1(x)+\ldots+C_q\psi_q(x)+\lambda\sum_{n=q+1}^{\infty}\left[\frac{\psi_n(x)}{\lambda_n-\lambda}\int_a^b f(\xi)\psi_n(\xi)d\xi\right].$$

64. Решить интегральное уравнение $u(x)=x^2-x^3+\int_0^{\ln 2} e^x e^{\xi}u(\xi)d\xi.$

► Здесь $f(x)=x^2-x^3$, ядро $K(x,\xi)=e^{x+\xi}$, $\lambda=1$. Вычислим определитель Фредгольма.

$$D(\lambda)=1-\lambda\int_0^{\ln 2} e^{2x}dx+\frac{\lambda^2}{2!}\int_0^{\ln 2}\int_0^{\ln 2}\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{x+\xi}\\ e^{\xi+x} & e^{2\xi}\end{vmatrix}d\xi\,dx-\ldots=1-\lambda\left.\frac{e^{2x}}{2}\right|_0^{\ln 2}=1-\frac{3}{2}\lambda.$$

Так как $D(1) = -\frac{1}{2} \neq 0$, то $\lambda = 1$ не является характеристическим числом ядра интегрального уравнения. $D(\lambda) = 0$ при $\lambda_0 = \frac{2}{3}$ – это характеристическое число. Найдем ранг λ_0. Для этого вычислим первый минор Фредгольма.

$$D(x,\xi;\lambda) = \lambda e^{x+\xi} - \lambda^2 \int_0^{\ln 2} \begin{vmatrix} e^{x+\xi} & e^{x+t} \\ e^{t+\xi} & e^{2t} \end{vmatrix} dt + \ldots = \lambda e^{x+\xi}.$$

$D(x,\xi;\lambda_0) = \frac{2}{3} e^{x+\xi} \neq 0$. Ранг λ_0 равен $q = 1$. Значит, характеристическому числу λ_0 принадлежит одна фундаментальная функция $\varphi_1(x)$.

$$\varphi_1(x) = \frac{D(x,\xi_1;\lambda_0)}{D(x_1,\xi_1;\lambda_0)} = \frac{\lambda_0 e^{x+\xi_1}}{\lambda_0 e^{x_1+\xi_1}} = e^{x-x_1},$$

где x_1 – любое число из интервала $(0, \ln 2)$.

Нормируя эту функцию, получим $\psi_1(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\|\varphi_1(x)\|}$. В пространстве Гильберта $L_2[0, \ln 2]$ норма $\|\varphi_1(x)\| = \sqrt{\int_0^{\ln 2} e^{2(x-x_1)} dx} = e^{-x_1}\sqrt{\frac{3}{2}}$. Отсюда $\psi_1(x) = e^x \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Тогда $u(x) = x^2 - x^3 + \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} e^x}{\frac{2}{3} - 1} \int_0^{\ln 2} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\xi^2 - \xi^3\right) e^{\xi} d\xi$. После интегрирования по частям, получаем искомое решение интегрального уравнения

$$u(x) = x^2 - x^3 + 4e^x \left(\ln^3 2 - 4\ln^2 2 + 8\ln 2 - 4\right). \blacksquare$$

Вычислить $D(\lambda)$, определить характеристические числа λ и их ранг для следующих симметричных ядер и интервалов.

65. $K(x,\xi)=1; \quad (0,1).$

66. $K(x,\xi)=x\xi; \quad (0,1).$

67. $K(x,\xi)=\sin x \sin\xi; \quad (0,2\pi).$

68. $K(x,\xi)=x+\xi; \quad (0,1).$

69. $K(x,\xi)=x^2+\xi^2; \quad (0,1).$

70. $K(x,\xi)=x^2\xi+x\xi^2; \quad (0,1).$

71. $K(x,\xi)=x^2+x\xi+\xi^2; \quad (0,1).$

Решить интегральные уравнения.

72. $u(x)=x+\lambda\int\limits_0^1 u(\xi)d\xi \quad (\lambda\neq 1).$

73. $u(x)=\dfrac{1}{2}-x+\int\limits_0^1 u(\xi)d\xi.$

74. $u(x)=\left(-6\pm 4\sqrt{3}\right)\int\limits_0^1 (x+\xi)u(\xi)d\xi.$

75. $u(x)=\left(1-\sqrt{3}x\right)+\left(-6+4\sqrt{3}\right)\int\limits_0^1 (x+\xi)u(\xi)d\xi.$

76. $u(x)=\left(1+\sqrt{3}x\right)+\left(-6-4\sqrt{3}\right)\int\limits_0^1 (x+\xi)u(\xi)d\xi.$

Раздел 5

Нелинейные интегральные уравнения

Рассмотрим уравнение вида

$$u(x)=\mu\int_{\Omega}K(x,\xi,u(\xi))d\xi+f(x),$$

где Ω – ограниченное замкнутое множество конечномерного пространства ненулевой лебеговой меры; $K(x,\xi,u)$, $f(x)$, $(x,\xi\in\Omega)$ – заданные функции, μ – параметр, $u(x)$ – искомая функция.

Нелинейный интегральный оператор

$$Au(x)=\int_{\Omega}K(x,\xi,u(\xi))d\xi$$

действует в некоторых банаховых пространствах *E*, измеримых на Ω функций, и обладает рядом свойств (непрерывен, вполне непрерывен, дифференцируем…). Если при этом $f(x)\in E$, то данное интегральное уравнение рассматривается как нелинейное операторное уравнение $u=\mu\,Au+f$ в *E*.

Говорят, что оператор *A*, действующий в банаховом пространстве *E*, удовлетворяет на множестве $M\subset E$ *условию Липшица с постоянной q*, если

$$\|Au-Av\|\le q\|u-v\|,\quad (u,v\in M).$$

Теорема 5. Пусть функция $K(x,\xi,u)$ непрерывна по совокупности переменных $x,\xi\in\Omega,|u|\le\rho$, и пусть $\left|\dfrac{\partial K(x,\xi,u)}{\partial u}\right|\le C$, $\left(x,\xi\in\Omega,|u|\le\rho\right)$. Тогда уравнение $u(x)=\mu\int_{\Omega}K(x,\xi,u(\xi))d\xi$ имеет единственное непрерывное решение $u^*(x)\,(x\in\Omega)$, удовлетворяющее неравенству $|u|\le\rho$, если $|\mu|C\cdot\operatorname{mes}\Omega<1$, $|\mu|\max\limits_{x\in\Omega}\int_{\Omega}\max\limits_{|u|\le\rho}|K(x,\xi,u)|d\xi\le\rho$. Если $u_0(x)$ – произвольная непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству $|u_0(x)| \le \rho \quad (x \in \Omega)$, то последовательные приближения $u_n(x) = \mu \int\limits_{\Omega} K(x, \xi, u_{n-1}(\xi))d\xi, \quad n \in \mathrm{N}$, равномерно на Ω сходятся к $u^*(x)$.

77. Решить интегральное уравнение $u(x) = \dfrac{1}{3}\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{x\xi}{1+u^2(\xi)}d\xi + 1$.

►Функция $K(x, \xi, u) = \dfrac{x\xi}{1+u^2(\xi)}$ – непрерывная функция своих аргументов. Имеет ограниченную производную по u,

$$\left|\frac{\partial K}{\partial u}\right| = \left|-\frac{2xu\xi}{\left(1+u^2\right)^2}\right| \le 1, \; x \in [-1,1], \; \xi \in [-1,1], \; -\infty < u < +\infty,$$

значит, удовлетворяет условию Липшица по переменной u. В качестве постоянной Липшица можно взять $q = 1$. Условие $|\mu| C \cdot \mathrm{mes}\,\Omega < 1$ выполнено, так как $\dfrac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 < 1$.

Применим метод последовательных приближений, приняв $u_0(x) = 1$.

$$u_1(x) = \frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{1}\frac{x\xi}{1+1^2}d\xi + 1 = \frac{x}{6} \cdot \frac{\xi^2}{2}\Bigg|_{-1}^{1} + 1 = 1, \; \ldots, \; u_n(x) = 1, \; \ldots$$

Искомое решение $u(x) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = 1$. ■

78. Методом последовательных приближений решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int\limits_0^x \frac{1+\varphi^2(\xi)}{1+\xi^2}d\xi,$$

взяв в качестве нулевого приближения: 1) $\varphi_0(x) = 0$; 2) $\varphi_0(x) = x$.

79. Методом последовательных приближений решить интегральное уравнение

$$\varphi(x)=\int_0^x \frac{\xi\varphi(\xi)}{1+\xi+\varphi(\xi)}d\xi.$$

80. Методом последовательных приближений найти второе приближение $\varphi_2(x)$ решения интегрального уравнения

$$\varphi(x)=1+\int_0^x \left[\varphi^2(\xi)+\xi\varphi(\xi)+\xi^2\right]d\xi.$$

81. Методом последовательных приближений найти третье приближение $\varphi_3(x)$ решения интегрального уравнения

$$\varphi(x)=\int_0^x \left[\xi\varphi^2(\xi)-1\right]d\xi.$$

Список литературы

1. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для втузов : в 2-х ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 5-е изд., испр. – М. : Высш. шк., 1998.

2. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах. – М. : Физматлит, 2003.

3. Интегральные уравнения : Справочная математическая библиотека / под ред. П. П. Забрейко и др. – М. : Наука, 1968.

4. Краснов, М. Л. Интегральные уравнения / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – М. : Наука, 1976.

5. Трикоми, Ф. Интегральные уравнения / Ф. Трикоми. – М. : Ин. лит., 1960.

6. Цлаф, Л. А. Вариационное исчисление и интегральные уравнения / Л. А. Цлаф. – СПб. : Лань, 2005.

7. Эльсгольц, Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц. – М. : Наука, 1969.

Елисеева Татьяна Владимировна

Задачи и упражнения по курсу
«Интегральные уравнения и вариационное исчисление»

Учебно-методическое пособие

Редактор *О. Ю. Ещина*

Технический редактор *Н. А. Вьялкова*

Корректор *Н. А. Сидельникова*

Компьютерная верстка *Н. В. Ивановой*

ИД № 06494 от 26.12.01

Сдано в производство 09.07.09. Формат 60х84 1/16.

Бумага писчая. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,86.

Уч.-изд. л. 2,22. Тираж 50. Заказ № 364. “С” 99.

Издательство Пензенского государственного университета.

440026, Пенза, Красная, 40.